開普勒行星定律 • 牛頓萬有引力定律

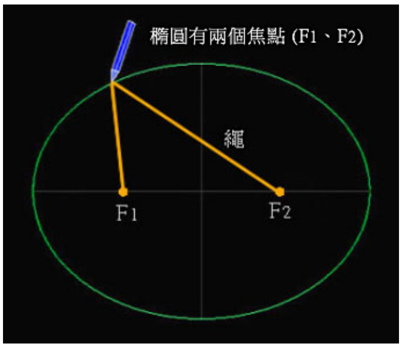
(稿源：義工天文培訓班 --- 第 8 講)

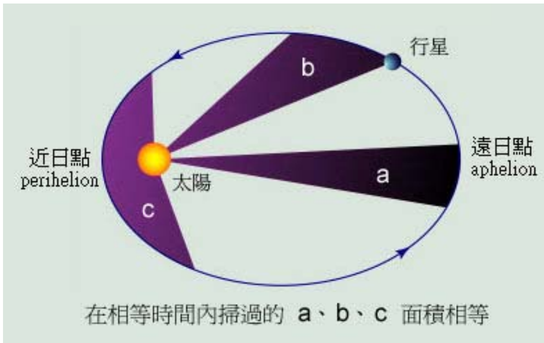
開普勒和他的行星定律

哥白尼 Nicolaus Copernicus (1473 - 1543)　第谷 Tycho Brahe (1546 -1601)　開普勒 Johannes Kepler (1571 - 1630)

德國人開普勒 (Kepler) 是第一位研究行星軌道的人，在學時已接受了哥白尼 (Copernicus) 的日心說，1600 年他應邀爲第谷 (Tycho) 的助手，一年後第谷逝世，開普勒遂把第谷畢生積累下來的觀測記錄整理，一開始他就留意火星以不等速運行，無論怎樣嘗試他也無法把火星的觀測數據歸納爲正圓形的軌道，開普勒進一步研究其他幾顆行星的運行，發現它們的軌道也非正圓形，經過八年努力，開普勒終於在 1609 年發表他的第一及第二行星定律：

- 行星沿橢圓軌道繞太陽旋轉，太陽位於橢圓的一個焦點上。
- 行星的向徑 (行星至太陽的聯線) 在相等的時間內掃過相等的面積。換句話說，行星在近日點走得最快，在遠日點那兒最慢。





- 1619 年，開普勒發表他的第三行星定律：行星到太陽平均距離的立方與其公轉週期的平方成正比：

平均距離 ^{3} / 公轉週期 ^{2} = 常數

行星	到太陽平均距離 a (AU)	公轉週期 T (年)	a^3 / T^2
水星	0.387	0.241	1.000
金星	0.723	0.615	1.000
地球	1.000	1.000	1.000
火星	1.524	1.881	1.000
木星	5.203	11.86	1.000
土星	9.539	29.46	1.000

這三條定律適用於一切環繞母星公轉的天然或人造物體 (例如地月系統、木衛系統，土衛系統、太陽系外行星、人造衛星等)，只是上式中的常數會有所變更。

木衛系統	到木星平均距離 a (10^6 km)	公轉週期 T (天)	a^3 / T^2
木衛一 Io	0.422	1.77	0.024
木衛二 Europa	0.671	3.55	0.024
木衛三 Ganymede	1.070	7.15	0.024
木衛四 Callisto	1.883	16.69	0.024

<u>開普勒行星定律的應用例子</u>

例 1. 參考上表的木衛系統資料，如果發現了新木衛，它的公轉週期是 250 天，它與木星的平均距離一定是 $(250^2 \times 0.024)^{1/3} = 11.45 \times 10^6$ km。

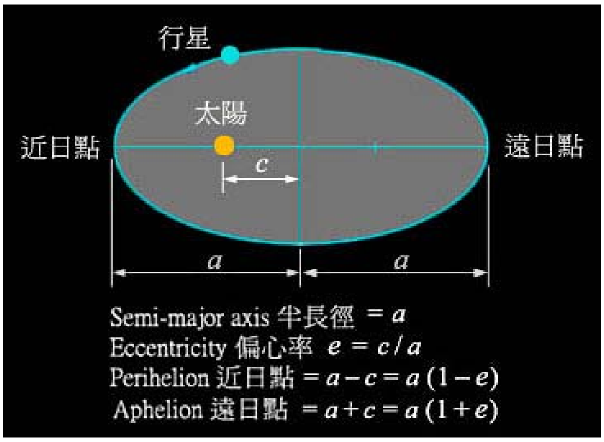
例 2. 月球-地球距離平均爲 384 400 km，它大約每年增加 3.8 cm，如果增加率不變，十億年後月地距離將會是 422 400 km，因此

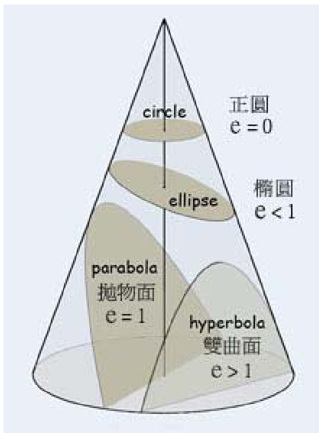
[月地距離 ^{3} / 月球繞地球週期 ^{2}] $_{現時}$ = [月地距離 ^{3} / 月球繞地球週期 ^{2}] $_{十億年後}$

十億年後月球繞地球週期 = √ [(十億年後月地距離 / 現時月地距離)^3] x 現時月球繞地球週期
= √ [(422 400 km / 384 400 km)^3] x 27.322 天 = 31.5 天

軌道半長徑、偏心率

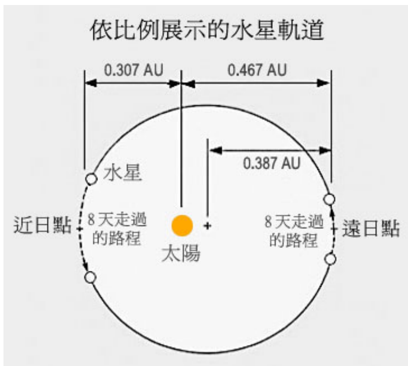
橢圓軌道有兩個重要指標：半長徑 (semi-major axis) 和 偏心率 (eccentricity)，前者即是科普書說的 "行星到太陽的平均距離"，後者形容橢圓偏離正圓的程度，它們的定義見附圖。從偏心率又得出近日點、遠日點兩個定義，以地球爲例，它在每年的 1 月 3 日左右過近日點，7 月 4 日左右過遠日點，因此北半球夏天的太陽比冬天時更遠！





行星中以水星的偏心率最大 ($e = 0.206$)，火星次之 ($e = 0.093$)，其他行星的 e 很小。冥王星 (矮行星) 的 $e = 0.249$，小行星的 e 可以很大，彗星的 e 更大。當 e 大過 1 時，彗星軌道只有近日點，沒有遠日點，因此這顆彗星繞過太陽之後便不再回歸了。

請留意，爲了方便說明，書本往往把行星軌道繪成卵形，實際上以比例展示，即使偏心率大如水星軌道，視覺上仍然是接近正圓形的。

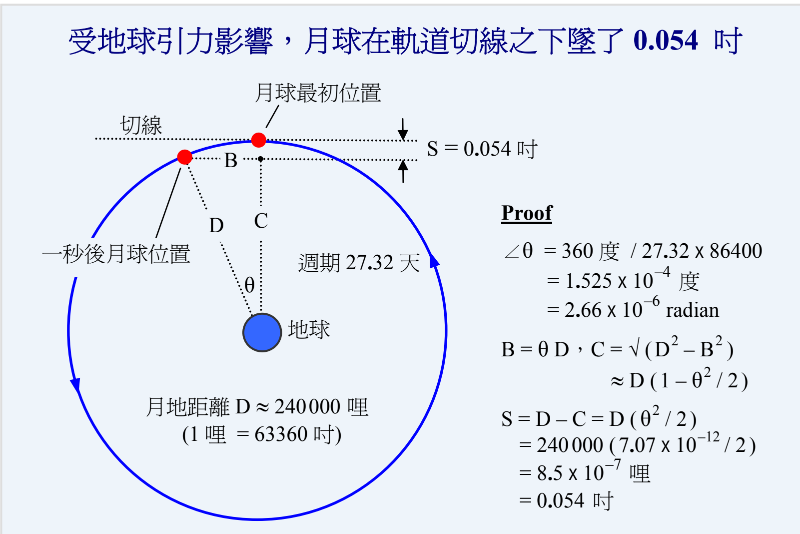


牛頓和他的萬有引力定律

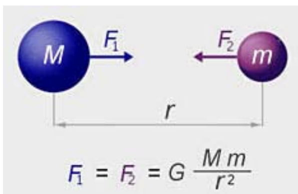
傳說牛頓因樹上蘋果跌在頭上而發現萬有引力，這只是野史，真正發現的經過是多方面的。

早在青年時代，牛頓已從 Galileo (b 1564)、Kepler (b 1571)、Descartes (b 1596)、Huygens (b 1629)、Hooke (b 1635) 等前學者領悟到太陽、行星及衛星之間存着某種力量關係，這種關係稱爲 gravitation，原字出自拉丁語 gravitatem，表示「重」的意思，後來中文把 gravitation 譯爲 "重力" 或 "引力"。踏入微積分萌芽時代，牛頓更從數學上了解某些參數之間存着 "平方反比律" (inverse square law) 的關係，例如 $\boldsymbol{x = 1 / y^2}$，於是他開始憧想 ------ 引力與距離是否也有 "平方反比律" 的關係呢？ 要知答案，自然要用事實求証，可是一時間牛頓還沒有找到事實証明。

1665 至 1666 年，英國爆發瘟疫，牛頓剛剛大學畢業，他回鄉在母親處避開瘟疫，某天偶然在庭園見蘋果從樹上跌下來，他靈機一觸就這樣想 ------ 蘋果墜落地上的力 (重量) 與維持月球繞地球運行之力 (引力) 是否同出一轍呢？究竟這所謂 "引力" 有沒有延展性令其他行星繞太陽運轉？ 於是他開始計算，當時他大約知道地球半徑 R = 4000 哩，月地距離 D = 240 000 哩 = 60 倍地球半徑，蘋果跌向地面的加速度 g = 32.2 呎/秒 ^{2} (9.8 m/s^2)，因此在頭一秒 (t = 1 s) 時，蘋果已下跌了 $1/2 \bullet g\, t^2 = 16.1$ 呎，如果蘋果下墜之力與月地間的引力都是同一力量，而引力又與距離平方成反比的話，那麼月球也應像蘋果在軌道切線之下跌了 16.1 呎 / 60^2 = 0.054 吋，見下圖。



本來像圖中要証明月球下墜 0.054 吋是很普通的算術，但不知何故，牛頓竟然計錯數 (他把地球半徑的哩數換算爲錯誤的吋數，另一說他引用了欠準的地球半徑值)，結果他得到 0.044 吋而不是應有的 0.054 吋，他只好把引力問題放下而轉研其他項目，就這樣一放之下便過了幾年，1671 年他聽到法國的 Picard 發表新的地球半徑值，於是他重新計算以前的月球下墜問題，今次他真的計得 0.054 吋，結果說明了三個原理： (一) 蘋果下墜之力與維持月球軌道運動之力是同一性質的 (universal)； (二) 兩件物體之間的引力與其距離的平方成反比； (三) 地球上的引力加速度與下墜體的質量無關 (即解釋了伽利略在比薩斜塔做的跌球實驗)。自此之後牛頓對研究更具信心，友人哈雷 (預測彗星回歸的 Halley) 又鼓勵和資助他發表研究結果，終於在 1687 年出版了影響後世的 "Principia" (全名《自然哲學的數學原理》)，1713 年出第二版，1726 年出第三版。在 Principia 中，牛頓論述了他的萬有引力定律：

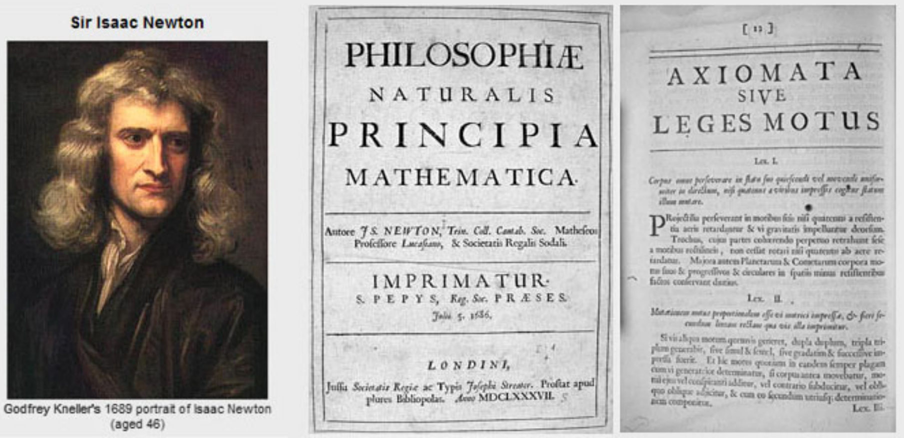


$$F = G\, M\, m / r^2$$

F 是兩個物體質量 M、m 之間的引力，r 是物體距離，G 是引力常數。

牛頓時還未確定 G 值，後來 Cavendish 在十八世紀末以 "扭力天平" 方法求得地球的平均密度，後人又從密度導出地球的質量及 $G = 6.75 \times 10^{-11}$ N m^2 / kg^2，現代 G 值則取 6.673×10^{-11}。

牛頓與 1687 年出版的 “Principia”，中圖是書面 (拉丁文)，右圖論第一及第二運動定律



Principia 亦論述牛頓的運動定律及其他力學原理，以下是應用例子。

設 r 是行星半徑，M 是行星質量，m 是在行星表面的物體質量

登月太空人的重量只有地球上的 1/6

例 3. <u>在行星表面的引力加速度</u> $\boldsymbol{g}$

行星對物體的引力 $= G\,M\,m\,/\,r^2$ (牛頓萬有引力定律)
物體在行星表面的重量 $= m\,g$ (牛頓第二運動定律)
這兩項相等，因此 $m\,g = G\,M\,m\,/\,r^2$

$$g = G\,M\,/\,r^2$$

(g 與物體質量 m 無關)

地球的 g 值 $= 9.81$ m/s^2，它可以用實驗求得，因此從上式又可以反算地球的質量，
即是 $M_{地球} = g\,r^2\,/\,G = 9.81 \times (6.378 \times 10^6)^2 / (6.673 \times 10^{-11}) = 5.98 \times 10^{24}$ kg

例 4. <u>物體環繞行星表面的速度</u> $\boldsymbol{v}_{circular}$

行星對物體的引力 $= G\,M\,m\,/\,r^2$
物體環繞行星時所得的離心力 $= m\,(\boldsymbol{v}_{circular})^2\,/\,r$
這兩項相等，因此 $m\,(\boldsymbol{v}_{circular})^2\,/\,r = G\,M\,m\,/\,r^2$

$$\boldsymbol{v}_{circular} = \sqrt{(G\,M\,/\,r)}$$

假設穿梭機在 420 km 高空繞地球飛行，r 實際爲
“地球半徑 + 飛行高度” = 6800 km，
穿梭機環繞地球的速度 $= \sqrt{[(6.673 \times 10^{-11})\,(5.97 \times 10^{24})\,/\,(6.8 \times 10^6)]}$
$= 7.7$ km/s

用同一算式可得地球環繞太陽的速度：
太陽質量 1.989×10^{30} kg，地球距離太陽 1.496×10^{11} m，
因此地球環繞太陽的速度 $= \sqrt{[(6.673 \times 10^{-11})\,(1.989 \times 10^{30})\,/\,(1.496 \times 10^{11})]} = 29.8$ km/s，
這個結果與用開普勒第三行星定律求得的地球軌道速度一致。

例 5. <u>物體脫離行星的逃逸速度</u> $\boldsymbol{v}_{esc}$

物體在行星表面的引力位能 (gravitational potential energy)

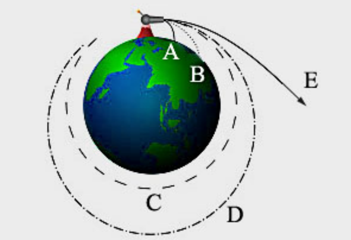
= 引力 x 行星半徑 $= G\,M\,m\,/\,r$

物體達到逃逸速度時的動能 (kinetic energy) $= 1/2 \bullet m\,v_{esc}^{\;2}$

這兩項相等，因此 $1/2 \bullet m\,v_{esc}^{\;2} = G\,M\,m\,/\,r$

$$v_{esc} = \sqrt{(2\,G\,M\,/\,r)}$$

v_{esc} 剛好是 $v_{circular}$ 的 $\sqrt{2}$ 倍 (1.4 倍)



A、B 的速度不足以環繞地球；C、D 速度在 7.9 至 11.2 km/s 之間，可以環繞地球，E 速度超過 11.2 km/s，可以脫離地球。

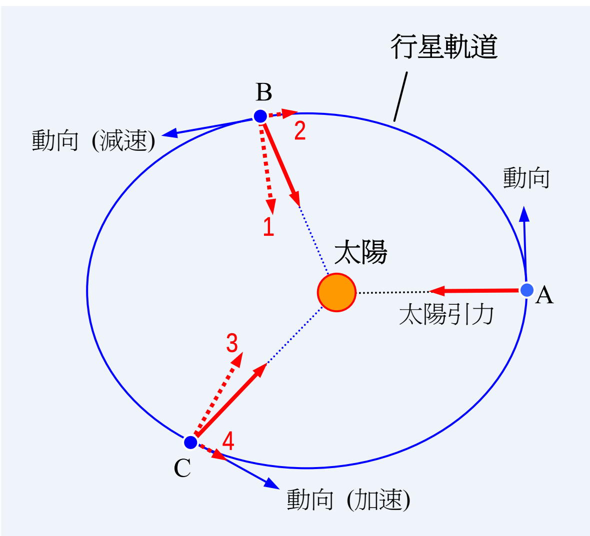
物體環繞各行星的速度和逃逸速度見下表，v_{esc} 越小，行星 / 衛星越難保持大氣層的存在。

	半徑 (km)	質量 (10^{24} kg)	平均密度 (水 = 1)	在行星表面的引力加速度 g (m/s^2)	(地球 = 1)	環繞行星表面的速度 $\boldsymbol{v}_{circular}$ (km/s)	逃逸速度 $\boldsymbol{v}_{esc}$ (km/s)
太陽	695950	1989 000	1.41	274	28	-	618
水星	2438	0.330	5.43	3.7	0.38	3.0	4.3 (無大氣層)
金星	6051	4.87	5.24	8.9	0.90	7.3	10.4
地球	6378	5.974	5.52	9.81	1.00	7.9	11.2
月球	1737	0.0735	3.34	1.6	0.17	1.7	2.4 (無大氣層)
火星	3397	0.642	3.93	3.7	0.38	3.6	5.0 (稀薄的大氣層)
木星	71490	1899	1.33	25.4	2.6	42	60
土星	60270	568	0.69	10.4	1.1	25	36
天王星	24970	86.6	1.32	8.8	0.9	15	21
海王星	24760	102	1.64	11.1	1.1	17	23
冥王星	1150	0.013	2.0	0.6	0.06	0.9	1.2 (無大氣層)

牛頓 - 開普勒行星定律

雖然開普勒發表了他的行星定律，但當代人仍然不知其物理，直至七十年後有了牛頓力學基礎才知其然。牛頓力學解釋了以下兩點：

- 爲什麼行星以非正圖形 (橢圓形) 軌道繞太陽旋轉 ?



設左圖中行星沿 A、B、C 的軌道運行，在 A 處，行星動向與太陽引力方向成直角，行星不會因太陽引力而加速或減速。

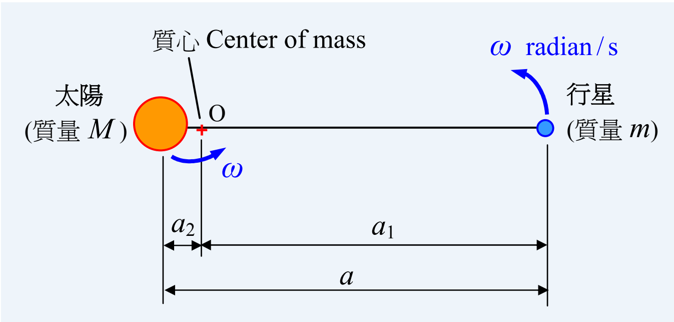
在 B 處，行星動向與太陽引力方向不成直角，後者可分解爲 1、2 兩個矢量，但矢量 2 的方向與行星動向相反，行星因此減速。

在 C 處，行星動向與太陽引力方向也不成直角，後者可分解爲 3、4 兩個矢量，但矢量 4 的方向與行星動向相同，行星因此加速。

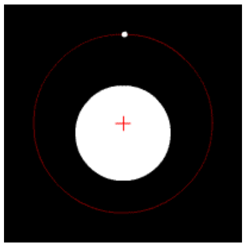
由此可見，行星以絕對固定的速度運行才有正圓形的軌道，如果辦不到，行星必以非圓形的軌道公轉。事實上，由於行星間的擾動及軌道傾斜，所有行星都有一定程度的偏心率。地球軌道 (偏心率 0.0167) 算很接近正圓了。

- 爲什麼行星到太陽平均距離的立方與其公轉週期的平方成正比 ？

  假設太陽只有一顆行星。太陽、行星和它們的共同質心 O 永遠排成直線，行星以角速度 ω 圍繞 O 旋轉，太陽也以相同的角速度圍繞 O 旋轉。



動畫：太陽與行星圍繞共同質心旋轉
http://forum.hkas.org.hk/web/Star_wobbling_animation.gif



行星的離心力 = $m\, a_1\, \omega^2$，太陽對行星的引力 = $G\, M\, m \,/\, a^2$，這兩個力互相平衡才能保持行星的運轉，因此

$$m\, a_1\, \omega^2 = G\, M\, m \,/\, a^2$$
$$a_1\, \omega^2 = G\, M \,/\, a^2 \quad \text{----- (1)}$$

同樣道理，太陽的離心力 = $M\, a_2\, \omega^2$，行星對太陽的引力 = $G\, M\, m \,/\, a^2$，這兩個力互相平衡，因此

$$M\, a_2\, \omega^2 = G\, M\, m \,/\, a^2$$
$$a_2\, \omega^2 = G\, m \,/\, a^2 \quad \text{----- (2)}$$

式子 (1) + (2) 得 $\quad (a_1 + a_2)\, \omega^2 = G\, (M + m) \,/\, a^2$

$$\omega^2 = G\, (M + m) \,/\, a^3$$

但 ω 又等於 $2\,\pi \,/\, T$，T 是行星的軌道週期 (公轉週期)，因此

$$(2\,\pi \,/\, T)^2 = G\, (M + m) \,/\, a^3$$
$$a^3 \,/\, T^2 = \mathrm{G}\, (M + m) \,/\, (4\,\pi^2)$$

M 比 m 大很多，所以 $a^3 \,/\, T^2 \approx G\, M \,/\, (4\,\pi^2)$ = 常數，即是証明了開普勒第三行星定律。

公式 $a^3 \,/\, T^2 = G\, (M + m) \,/\, (4\,\pi^2)$ 是開普勒第三行星定律的 "精確版"，有時稱爲牛頓-開普勒定律 (Newtonian Kepler's law)，許多天體的質量都是用它推算出來。

例 6. 地球軌道半長徑 a = 1.4960 x 10^{11} m，軌道週期 T = 365.256 天 = 3.1558 x 10^7 s，

[質量] $_{\text{太陽 + 地球}}$ = $(a^3 \,/\, T^2)\,(4\,\pi^2) \,/\, G$ = [(1.4960 x $10^{11})^3$ / (3.1558 x $10^7)^2$] $(4\,\pi^2)$ / (6.673 x 10^{-11})

= 1.989 x 10^{30} kg

已知地球質量約有 6 x 10^{24} kg 或太陽的百萬份之三，在此可以忽略不計，
因此太陽質量 = 1.989 x 10^{30} kg

例 7. 用同樣方法可以算出木星的質量：

木衛三 Ganymede 軌道半長徑 a = 1.070 x 10^9 m，軌道週期 T = 7.155 天 = 6.182 x 10^5 s，

[質量] $_{\text{木星 + 木衛三}}$ = $(a^3 \,/\, T^2)\,(4\,\pi^2) \,/\, G$ = [(1.070 x $10^9)^3$ / (6.182 x $10^5)^2$] $(4\,\pi^2)$ / (6.673 x 10^{-11})

= 1.899 x 10^{27} kg

木衛三質量比木星小萬倍，因此木星質量 = 1.899 x 10^{27} kg

例 8. <u>月球的質量</u>

月地球軌道半長徑 $a = 384400$ km，軌道週期 $T = 27.3217$ 天 $= 2.36059 \times 10^6$ s，

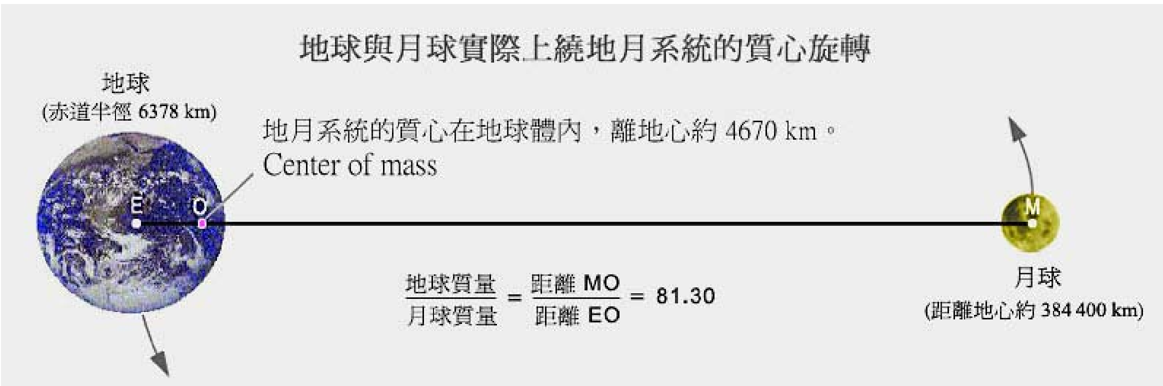
$$[質量]_{地球+月球} = (a^3 / T^2)(4\pi^2)/G = [(3.8440 \times 10^8)^3 / (2.36059 \times 10^6)^2](4\pi^2)/(6.673 \times 10^{-11})$$
$$= 6.030 \times 10^{24} \text{ kg}$$

已知地球質量 $= 5.974 \times 10^{24}$ kg，
因此月球質量 $= (6.030 - 5.974) \times 10^{24} = 0.056 \times 10^{24}$ kg

用這個方法算出的月球質量比較粗略，因爲差數 "6.030 – 5.974" 內的兩項分別不大，計算也沒有考慮到地月系統質心擺動 (wobble) 的影響。這個質心擺動頗大，足令地球近隣 (太陽、金星、火星等) 的黄經度作週期性的變化，測量這些擺動便知質心的位置，即是下圖地球體內的 O 點，從 O 點位置便算得

$$月球質量 = 地球質量 \times 距離\ EO / 距離\ MO$$
$$= (5.974 \times 10^{24}) \times 4670 / (384400 - 4670) = 0.0735 \times 10^{24} \text{ kg}$$

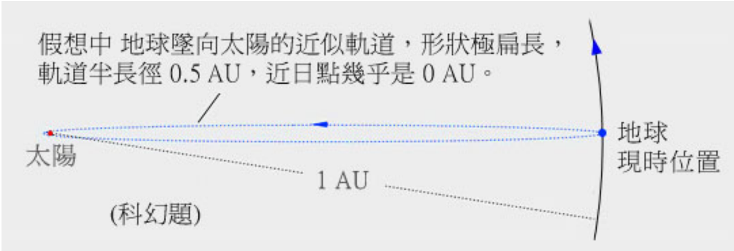
有了探月衛星之後，天文學家利用衛星的軌道數據算得更準的月球質量 $= 7.348 \times 10^{22}$ kg 或 1 / 81.30 地球質量。在太陽系所有行星 - 衛星系統中，月球相對地球的質量出奇地大。



← 各大天然衛星的質量比較

在所有天然衛星中，月球相對地球的質量特別大 (達 1/81)，其他衛星的相對質量只有幾千份之一甚至幾萬份之一。月球質量大的原因可用 "大碰撞論" (The Giant Impact Hypothesis) 來解釋，這理論建基於阿羅波登月後的研究成果，始於 1980 年代中期，是目前最被人接受的月球起源理論。

例 9. 這是科幻題： 假如有朝一日地球停止圓周運動而墜向太陽，它要經過多少天 ("大限") 才被太陽吞滅呢 ？



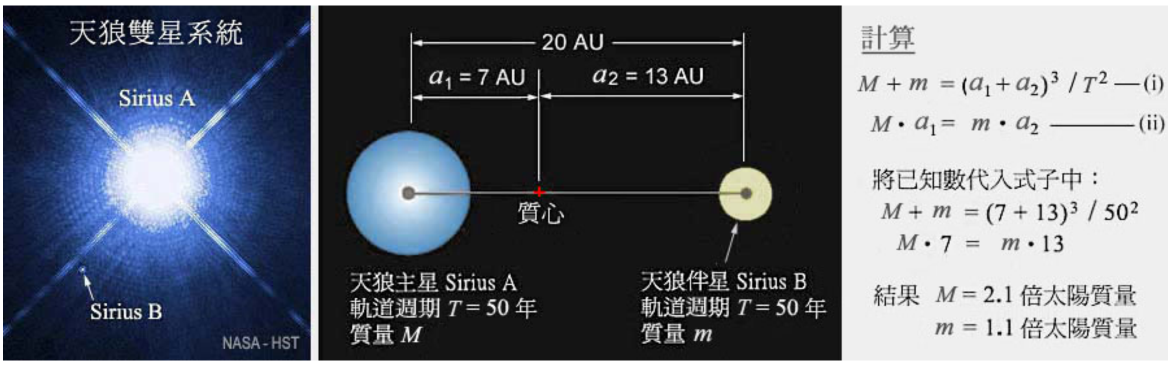
假設地球以極扁長的軌道 (近似直線) 墜向太陽，像上圖，軌道半長徑便是 0.5 AU，軌道週期必定是 $T = \sqrt{0.5^3} = 0.353$ 年，地球墜向太陽所需的時間是 0.353 年的一半 = 0.176 年或 64 天，換言之，64 天之後，地球必滅，自然不可能沿反方向回歸至現時位置了。

用上述方法也可估計各個行星墜毀太陽前的 "大限"，只需將該行星公轉週期乘以 0.176 就是了：

	公轉週期	墜向太陽的時間
水星	0.24 年	0.24 年 x 0.176 = 15 天
金星	0.61 年	0.61 年 x 0.176 = 39 天
火星	1.88 年	1.88 年 x 0.176 = 121 天
木星	11.9 年	11.9 年 x 0.176 = 2.1 年
土星	29.5 年	29.5 年 x 0.176 = 5.2 年

同樣的算法適用於月球，萬一月球失速墜向地球，它的 "大限" = 月球軌道週期 (27.3 天) x 0.176 ≈ 5 天。若嫦娥再吃靈藥並且以自由墜落形式重返地球，她的預計回程約是 5 天。

例 10. 如果 a 的單位是 AU，T 的單位是年，M 和 m 的單位是太陽質量的倍數，牛頓 - 開普勒定律可以簡化爲 $M + m = a^3 / T^2$，簡化後的式子可以推算雙星系統內的主星和伴星質量，例如下圖的天狼雙星系統，主星叫 Sirius A，伴星叫 Sirius B，平均距離 20 AU，兩星相對着圍繞系統的質心旋轉，軌道週期同樣是 50 年。從觀測中又知主星到質心的平均距離有 7 AU，伴星到質心的平均距離有 20 – 7 = 13 AU，將已知數代入牛頓 - 開普勒定律的簡化式子中便可算出兩星的質量。



更多資料

開普勒第三定律發展史 http://forum.hkas.org.hk/viewthread.php?tid=4341&extra=page%3D5
軌道根數 http://forum.hkas.org.hk/viewthread.php?tid=4980&extra=page%3D1
行星的軌道及物理數據 http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/

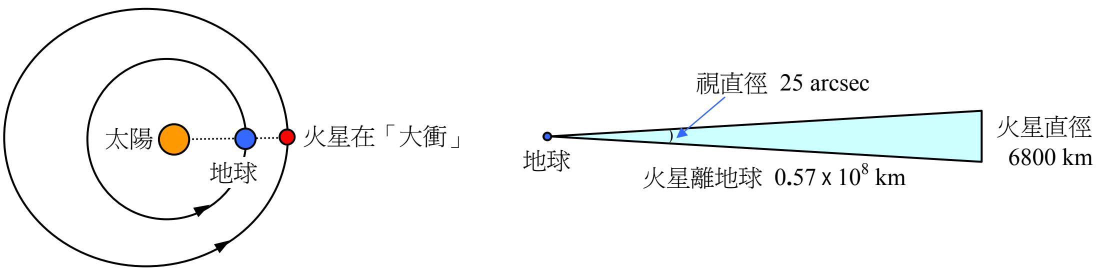
Q&A

(計算時可設定地日距離 = 1 AU)

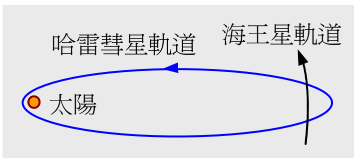
1. 火星軌道半長徑 = 1.5235 AU，偏心率 = 0.0934，求它的近日點和遠日點。
2. 火星直徑 6800 km，在「大衝」時火星最接近地球，也在近日點，它的視直徑有多大？
3. 水星軌道半長徑 = 0.387 AU，偏心率 = 0.206，問水星最大和最小視直徑的比例。
4. 哈雷彗星每 76 年回歸一次，它的軌道偏心率 = 0.967，求它的近日點和遠日點。
5. 爲什麼冥王星會走入海王星的軌道之內？
6. 近年發現的 Eris (TNO) 軌道週期是 557 年，它的軌道半長徑有多長？
7. 地球同步衛星離地面 35786 km，求它環繞地球的速度及週期。
   (地球半徑 = 6378 km，地球質量 = 5.974×10^{24} kg)
8. 土衛六 (Titan) 的軌道週期 = 15.945 天，軌道半長徑 = 1.2218×10^{6} km，求土星的質量。
9. 在飛馬座的 51 Pegasi 是一顆像太陽的星體 (M = 1.06 太陽質量)，距離地球 50 光年，1995 年發現了它有一顆行星叫 51 Pegasi b，行星的軌道週期 = 4.231 天，質量起碼有木星的一半，這顆行星到母體的平均距離有多少？ 爲什麼天文學家說它是 *hot Jupiter*？
10. 穀神星 Ceres 是最大的小行星，直徑 960 km，質量約 10^{21} kg，請論述穀神星有無可能出現大氣層？如果太空人登陸穀神星，他的重量有多小？ (假定太空人在地球的重量 = 90 kg)
11. 有一類星叫白矮星 (white dwarf)，典型質量 = 1 個太陽質量但半徑似地球；另一類叫中子星 (neutron star)，典型質量是太陽的兩倍但半徑估計只有 15 km，它們的表面逃逸速度是光速的百份之幾？
    (光速 = 300,000 km/s，太陽質量 ≈ 2×10^{30} kg，地球半徑 ≈ 6400 km)

答案：

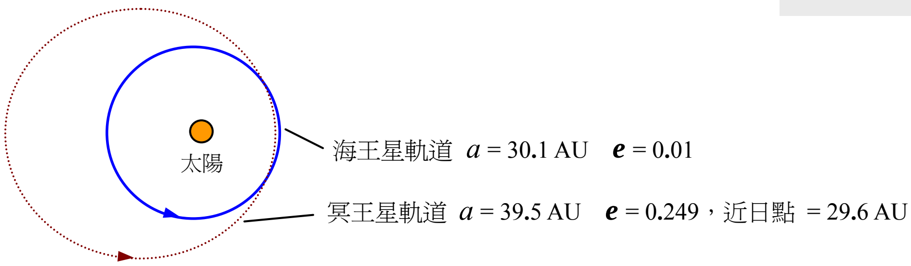
1. 近日點 = $a(1 - e)$ = 1.3812 AU，遠日點 = $a(1 + e)$ = 1.6658 AU
2. 火星軌道的近日點 = 1.381 AU，最近地球時有 (1.381 – 1) AU = 0.57×10^{8} km，
   相應的火星視直徑 = $\sin^{-1}$ 6800 / (0.57×10^{8}) ≈ 25 角秒



3. 最大 : 最小視直徑 = (1 AU + 水星的遠日點) **:** (1 AU – 水星的遠日點) = (1 + 0.467) : (1 – 0.467) ≈ 2.8
4. 哈雷彗星的軌道半長徑 = $(76^2)^{1/3}$ = 17.9 AU，
   近日點 = 17.9 (1 – 0.967) ≈ 0.59 AU，遠日點 = 17.9 (1 + 0.967) ≈ 35 AU



5. 因爲冥王星的軌道近日點走入海王星的軌道之內



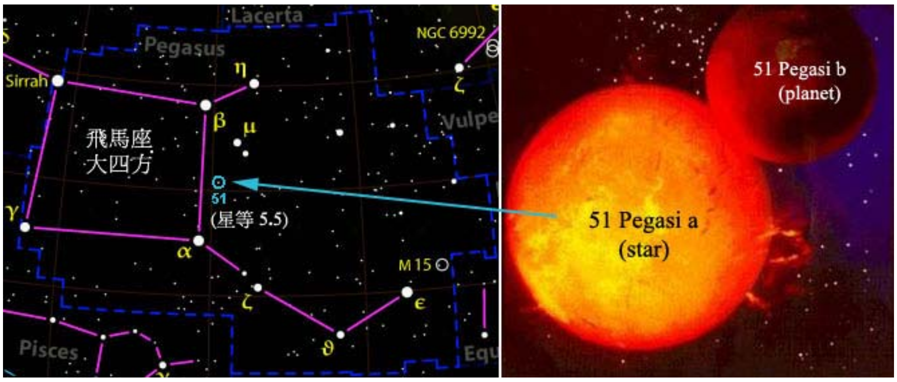
6. Eris 軌道半長徑 $= 557^{2/3} = 67.7$ AU

7. 地球同步衛星的 $v_{circular} = \surd\,[(6.673 \times 10^{-11})\,(5.974 \times 10^{24}) / (6.378 \times 10^{6} + 35.786 \times 10^{6})] = 3.0748$ km/s，軌道週期 $= 2\pi\,(6378 + 35786) / 3.0748 = 86160$ s = 23h 56m (地球自轉週期)。

8. $M + m = 4\,\pi^2\,a^3 / (T^2\,G) = 4\,\pi^2\,(1.2218 \times 10^9)^3 / [(15.945 \times 86400)^2\,(6.673 \times 10^{-11})] = 5.685 \times 10^{26}$ kg，$M >> m$，因此土星質量 $\approx 568 \times 10^{24}$ kg 或地球的 95 倍。

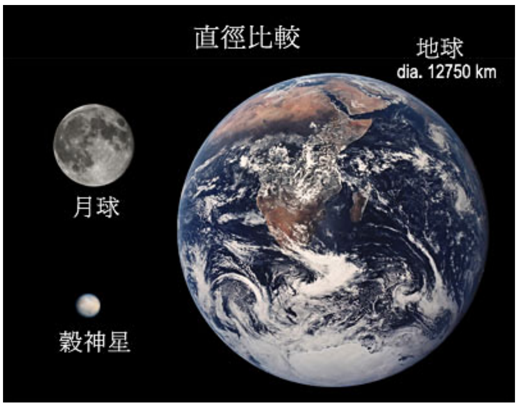
   從質量和體積可以算出土星的平均密度比水還要低 (約 0.7 g/cc)，說明土星的石質和鐵質部份很少，大部份的土星體積由氣體 (壓縮氣體、液化氣體) 組成。

9. 假設 51 Pegasi 質量 (M) 比其行星質量 (m) 大許多倍，行星到母體的平均距離 $a = [T^2\,(M + m)]^{1/3} = [(4.231 / 365.25)^2\,(1.06)]^{1/3} = 0.052$ AU，這個距離暗示行星因太接近母體而變得很熱 (估計 1000^0 C)，行星的質量又是木星級，因此說 51 Pegasi b 像 *hot Jupiter*。



10. 在穀神星上，逃逸速度 $= \surd\,(2\,G\,M / r) = \surd\,[2\,(6.673 \times 10^{-11})(10^{21}) / (4.8 \times 10^5)] = 530$ m/s，這個速度太低不可能保持大氣層。

    穀神星的 $g = G\,M / r^2 = (6.673 \times 10^{-11})(10^{21}) / (4.8 \times 10^5)^2 = 0.29$ m/s^2 或地球 g 的 1/34，因此太空人在此只感覺重 2.6 kg。



11. 白矮星的逃逸速度 $= \surd\,(2\,G\,M / r) = \surd\,[2\,(6.673 \times 10^{-11})\,(2 \times 10^{30}) / (6.4 \times 10^5)\,] = 20\,000$ km/s 或 7 % 光速。 中子星的逃逸速度 $= \surd\,[2\,(6.673 \times 10^{-11})\,(4 \times 10^{30}) / (1.5 \times 10^4)\,] = 189{,}000$ km/s 或 63 % 光速。